МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ
(МИИГАиК)

Геодезический факультет
Кафедра высшей математики

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 5387FD2AF5B17FED816FDE9A1D4973B1
Владелец: Степанченко Алексей Леонидович
Действителен: с 21.07.2025 по 14.10.2026

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор
А. Л. Степанченко
16 февраля 2024 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ) «Б1.О.05 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ»

Уровень высшего образования: магистратура

Направление подготовки: 21.04.03 Геодезия и дистанционное зондирование

Направленность(профиль) подготовки: Управление производственно-технологическими процессами

Квалификация (степень) выпускника: магистр

Форма обучения: очная

Год набора (приема на обучение): 2024

Срок получения образования: 2 года

Объем: в зачетных единицах: 6 з.е.
в академических часах: 216 ак.ч.

Москва, 2024

Разработчики:
Доцент кафедры Высшей математики, к.н. Аристархова А. В.

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) составлен в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 21.04.03 Геодезия и дистанционное зондирование, утвержденного приказом Минобрнауки от 11.08.2020 № 938

Согласование и утверждение

№	Подразделение	Ответственное лицо	ФИО	Виза	Дата, протокол (при наличии)
1	Геодезический факультет	Председатель ученого совета факультета	Половнев О. В.	Рассмотрено	11.12.2023, № 7/23

1. Планируемые результаты обучения, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

ОПК-1 Способен решать производственные и (или) исследовательские задачи на основе фундаментальных знаний в области геодезии и дистанционного зондирования

ОПК-1.1 Демонстрирует навыки физического и программного моделирования отдельных фрагментов процесса выбора оптимального варианта для конкретных условий

Знать:

ОПК-1.1/Зн1 Методы составления математической модели практической задачи на оптимизацию

Уметь:

ОПК-1.1/Ум1 Выявить перечень подходящих для решения конкретной задачи методов математической интерпретации процесса

Владеть:

ОПК-1.1/Нв1 Навыками создания математических моделей, позволяющих наделить рассматриваемый объект необходимыми свойствами оригинала, для отладки процедуры решения задачи

ОПК-1.2 Использует фундаментальные знания профессиональной деятельности для решения конкретных задач в области геодезии и дистанционного зондирования

Знать:

ОПК-1.2/Зн1 Основные математические и естественные методы, позволяющие решать профессиональные задачи

Уметь:

ОПК-1.2/Ум1 Описать с использованием математического аппарата происходящие процессы

Владеть:

ОПК-1.2/Нв1 Основным математическим аппаратом для решения задач геодезии и дистанционного зондирования

ОПК-1.3 Анализирует причины снижения качества технологических процессов и предлагает эффективные способы повышения качества производства работ при выполнении различных технологических операций

Знать:

ОПК-1.3/Зн1 Аппарат, применяемый для описания изменения объекта с течением времени

Уметь:

ОПК-1.3/Ум1 Обосновать наилучший способ проведения операции в условиях существования различных ограничений

Владеть:

ОПК-1.3/Нв1 Способностью интерпретировать полученные численные значения характеристик, отражающих изменение объекта с течением времени

ОПК-1.4 Демонстрирует навыки использования современных инструментов и методов планирования и контроля проектов, связанных с осложнениями, возникающими при производстве работ

Знать:

ОПК-1.4/Зн1 Современные направления развития математических методов оценки планируемых работ

Уметь:

ОПК-1.4/Ум1 Применять достижения прикладной математики для решения профессиональных задач

Владеть:

ОПК-1.4/Нв1 Способностью использовать современные научные разработки для анализа происходящих процессов и качественной оценки проведенных работ

2. Показатели и критерии оценивания компетенций

Планируемые результаты освоения программы	Уровень овладения	Критерии оценивания (перечень сформированных ИДК/ЗУВ по уровням освоения)
ОПК-1 Способен решать производственные и (или) исследовательские задачи на основе фундаментальных знаний в области геодезии и дистанционного зондирования	Повышенный	ИДК ОПК-1.1 Демонстрирует навыки физического и программного моделирования отдельных фрагментов процесса выбора оптимального варианта для конкретных условий Знать: ОПК-1.1/Зн1 Методы составления математической модели практической задачи на оптимизацию Уметь: ОПК-1.1/Ум1 Выявить перечень подходящих для решения конкретной задачи методов математической интерпретации процесса Владеть: ОПК-1.1/Нв1 Навыками создания математических моделей, позволяющих наделить рассматриваемый объект необходимыми свойствами оригинала, для отладки процедуры решения задачи ИДК ОПК-1.2 Использует фундаментальные знания профессиональной деятельности для решения конкретных задач в области геодезии и дистанционного зондирования Знать: ОПК-1.2/Зн1 Основные математические и естественные методы, позволяющие решать профессиональные задачи Уметь: ОПК-1.2/Ум1 Описать с использованием математического аппарата происходящие процессы Владеть: ОПК-1.2/Нв1 Основным математическим аппаратом для решения задач геодезии и дистанционного зондирования

		ИДК ОПК-1.3 Анализирует причины снижения качества технологических процессов и предлагает эффективные способы повышения качества производства работ при выполнении различных технологических операций Знать: ОПК-1.3/Зн1 Аппарат, применяемый для описания изменения объекта с течением времени Уметь: ОПК-1.3/Ум1 Обосновать наилучший способ проведения операции в условиях существования различных ограничений Владеть: ОПК-1.3/Нв1 Способностью интерпретировать полученные численные значения характеристик, отражающих изменение объекта с течением времени ИДК ОПК-1.4 Демонстрирует навыки использования современных инструментов и методов планирования и контроля проектов, связанных с осложнениями, возникающими при производстве работ Знать: ОПК-1.4/Зн1 Современные направления развития математических методов оценки планируемых работ Уметь: ОПК-1.4/Ум1 Применять достижения прикладной математики для решения профессиональных задач Владеть: ОПК-1.4/Нв1 Способностью использовать современные научные разработки для анализа происходящих процессов и качественной оценки проведенных работ
	Базовый	ИДК ОПК-1.1 Демонстрирует навыки физического и программного моделирования отдельных фрагментов процесса выбора оптимального варианта для конкретных условий Знать: ОПК-1.1/Зн1 Методы составления математической модели практической задачи на оптимизацию Уметь: ОПК-1.1/Ум1 Выявить перечень подходящих для решения конкретной задачи методов математической интерпретации процесса

		ИДК ОПК-1.2 Использует фундаментальные знания профессиональной деятельности для решения конкретных задач в области геодезии и дистанционного зондирования Знать: ОПК-1.2/Зн1 Основные математические и естественные методы, позволяющие решать профессиональные задачи Уметь: ОПК-1.2/Ум1 Описать с использованием математического аппарата происходящие процессы ИДК ОПК-1.3 Анализирует причины снижения качества технологических процессов и предлагает эффективные способы повышения качества производства работ при выполнении различных технологических операций Знать: ОПК-1.3/Зн1 Аппарат, применяемый для описания изменения объекта с течением времени Уметь: ОПК-1.3/Ум1 Обосновать наилучший способ проведения операции в условиях существования различных ограничений ИДК ОПК-1.4 Демонстрирует навыки использования современных инструментов и методов планирования и контроля проектов, связанных с осложнениями, возникающими при производстве работ Знать: ОПК-1.4/Зн1 Современные направления развития математических методов оценки планируемых работ Уметь: ОПК-1.4/Ум1 Применять достижения прикладной математики для решения профессиональных задач
	Пороговый	ИДК ОПК-1.1 Демонстрирует навыки физического и программного моделирования отдельных фрагментов процесса выбора оптимального варианта для конкретных условий Знать: ОПК-1.1/Зн1 Методы составления математической модели практической задачи на оптимизацию

		ИДК ОПК-1.2 Использует фундаментальные знания профессиональной деятельности для решения конкретных задач в области геодезии и дистанционного зондирования Знать: ОПК-1.2/Зн1 Основные математические и естественные методы, позволяющие решать профессиональные задачи ИДК ОПК-1.3 Анализирует причины снижения качества технологических процессов и предлагает эффективные способы повышения качества производства работ при выполнении различных технологических операций Знать: ОПК-1.3/Зн1 Аппарат, применяемый для описания изменения объекта с течением времени ИДК ОПК-1.4 Демонстрирует навыки использования современных инструментов и методов планирования и контроля проектов, связанных с осложнениями, возникающими при производстве работ Знать: ОПК-1.4/Зн1 Современные направления развития математических методов оценки планируемых работ

3. Шкала оценивания

Оценка	Критерии оценивания (перечень сформированных ИДК/ЗУВ)
Отлично	ОПК-1.1 Демонстрирует навыки физического и программного моделирования отдельных фрагментов процесса выбора оптимального варианта для конкретных условий ОПК-1.1/Зн1 Методы составления математической модели практической задачи на оптимизацию ОПК-1.1/Ум1 Выявить перечень подходящих для решения конкретной задачи методов математической интерпретации процесса ОПК-1.1/Нв1 Навыками создания математических моделей, позволяющих наделить рассматриваемый объект необходимыми свойствами оригинала, для отладки процедуры решения задачи ОПК-1.2 Использует фундаментальные знания профессиональной деятельности для решения конкретных задач в области геодезии и дистанционного зондирования ОПК-1.2/Зн1 Основные математические и естественные методы, позволяющие решать профессиональные задачи ОПК-1.2/Ум1 Описать с использованием математического аппарата происходящие процессы ОПК-1.2/Нв1 Основным математическим аппаратом для решения задач геодезии и дистанционного зондирования

	ОПК-1.3 Анализирует причины снижения качества технологических процессов и предлагает эффективные способы повышения качества производства работ при выполнении различных технологических операций ОПК-1.3/Зн1 Аппарат, применяемый для описания изменения объекта с течением времени ОПК-1.3/Ум1 Обосновать наилучший способ проведения операции в условиях существования различных ограничений ОПК-1.3/Нв1 Способностью интерпретировать полученные численные значения характеристик, отражающих изменение объекта с течением времени ОПК-1.4 Демонстрирует навыки использования современных инструментов и методов планирования и контроля проектов, связанных с осложнениями, возникающими при производстве работ ОПК-1.4/Зн1 Современные направления развития математических методов оценки планируемых работ ОПК-1.4/Ум1 Применять достижения прикладной математики для решения профессиональных задач ОПК-1.4/Нв1 Способностью использовать современные научные разработки для анализа происходящих процессов и качественной оценки проведенных работ
Хорошо	ОПК-1.1 Демонстрирует навыки физического и программного моделирования отдельных фрагментов процесса выбора оптимального варианта для конкретных условий ОПК-1.1/Зн1 Методы составления математической модели практической задачи на оптимизацию ОПК-1.1/Ум1 Выявить перечень подходящих для решения конкретной задачи методов математической интерпретации процесса ОПК-1.2 Использует фундаментальные знания профессиональной деятельности для решения конкретных задач в области геодезии и дистанционного зондирования ОПК-1.2/Зн1 Основные математические и естественные методы, позволяющие решать профессиональные задачи ОПК-1.2/Ум1 Описать с использованием математического аппарата происходящие процессы ОПК-1.3 Анализирует причины снижения качества технологических процессов и предлагает эффективные способы повышения качества производства работ при выполнении различных технологических операций ОПК-1.3/Зн1 Аппарат, применяемый для описания изменения объекта с течением времени ОПК-1.3/Ум1 Обосновать наилучший способ проведения операции в условиях существования различных ограничений ОПК-1.4 Демонстрирует навыки использования современных инструментов и методов планирования и контроля проектов, связанных с осложнениями, возникающими при производстве работ ОПК-1.4/Зн1 Современные направления развития математических методов оценки планируемых работ ОПК-1.4/Ум1 Применять достижения прикладной математики для решения профессиональных задач
Удовлетворительно	ОПК-1.1 Демонстрирует навыки физического и программного моделирования отдельных фрагментов процесса выбора оптимального варианта для конкретных условий ОПК-1.1/Зн1 Методы составления математической модели практической задачи на оптимизацию

	ОПК-1.2 Использует фундаментальные знания профессиональной деятельности для решения конкретных задач в области геодезии и дистанционного зондирования ОПК-1.2/Зн1 Основные математические и естественные методы, позволяющие решать профессиональные задачи ОПК-1.3 Анализирует причины снижения качества технологических процессов и предлагает эффективные способы повышения качества производства работ при выполнении различных технологических операций ОПК-1.3/Зн1 Аппарат, применяемый для описания изменения объекта с течением времени ОПК-1.4 Демонстрирует навыки использования современных инструментов и методов планирования и контроля проектов, связанных с осложнениями, возникающими при производстве работ ОПК-1.4/Зн1 Современные направления развития математических методов оценки планируемых работ
Неудовле-творительно	Результаты обучения не сформированы на достаточном уровне

4. Контрольные мероприятия по дисциплине

Вид контроля	Форма контроля/Оценочное средство
Текущий контроль	Решение задач Контрольная работа Расчетно-графическая работа
Промежуточная аттестация	Экзамен

№ п/п	Наименование раздела	Контролируемые ИДК	Вид контроля/ используемые оценочные материалы	
			Текущий	Промежут. аттестация
1	Линейные экономические модели	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3 ОПК-1.4	Решение задач Контрольная работа	Экзамен
2	Линейное программирование	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3 ОПК-1.4	Решение задач Расчетно-графическая работа	Экзамен
3	Дискретная математика	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3 ОПК-1.4	Решение задач	Экзамен

5. Порядок проведения промежуточной аттестации

Порядок проведения промежуточной аттестации регламентируется локальными нормативными актами Университета:

- Положением о формах, периодичности, порядке текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по основным образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный университет геодезии и картографии», п.6 «Организация и проведение промежуточной аттестации».
- Положением о порядке осуществления образовательного процесса, проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный университет геодезии и картографии», п.8 «Проведение промежуточной аттестации с применением ЭО и ДОТ».

Промежуточная аттестация: Экзамен, 1 семестр.

6. Оценочные материалы текущего контроля

Раздел 1. Линейные экономические модели

Контролируемые ИДК: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3 ОПК-1.4

Тема 1.1. Матрицы и определители

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Найдите

$$3A-B-4C,\ \text{если}\ A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&2\\3&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$$

2. Найдите

$$3A^T-5B,\ \text{если}\ A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\3&1\end{pmatrix}$$

3. Найдите AB и BA, если это возможно, и сравните результаты

$$\text{а)}\ A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix};\ \text{б)}\ A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\\1&0\end{pmatrix};$$

$$\text{в)}\ A=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\ \text{г)}\ A=\begin{pmatrix}0&-5&1&0\\3&0&-2&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&0\\1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

4. Вычислите определители

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix}9&12\\-2&15\end{vmatrix};\ \text{б)}\ \begin{vmatrix}6&1&1\\0&-1&-1\\1&-3&1\end{vmatrix};\ \text{в)}\ \begin{vmatrix}4&3&1\\0&1&2\\4&0&1\end{vmatrix};\ \text{г)}\ \begin{vmatrix}-3&-5&4&7\\9&8&-5&-8\\3&2&-3&-4\\6&7&-2&-5\end{vmatrix}$$

5. Решите уравнения и неравенства

$$\begin{vmatrix}x+2&4&-1\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&0&x\end{vmatrix}$$

а) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ x & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \le 4$; б) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ -x & 0 & 2 \\ 0 & x & 6 \end{vmatrix} < 0$.

6. Найдите ранг матрицы А с помощью метода окаймляющих миноров и укажите какой-либо её базисный минор, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. Решите задачу

Предприятие производит 3 типа продукции, объемы выпуска заданы матрицей $A = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 100 \end{pmatrix}$. Цена реализации единицы i-го типа продукции в j-ом регионе задана матрицей $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, где $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$. Найдите матрицу C выручки по регионам.

8. Решите задачу

Завод производит двигатели, которые могут либо сразу потребовать дополнительной регулировки (в 40% случаев), либо сразу могут быть использованы (в 60% случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, потребуют дополнительной регулировки через месяц в 65% случаев, а в 35% случаев через месяц будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, потребуют её через месяц в 20% случаев и продолжат хорошо работать в 80% случаев. Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через 2 месяца после выпуска? Через 3 месяца?

Завод производит двигатели, которые могут либо сразу потребовать дополнительной регулировки (в 40% случаев), либо сразу могут быть использованы (в 60% случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, потребуют дополнительной регулировки через месяц в 65% случаев, а в 35% случаев через месяц будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, потребуют её через месяц в 20% случаев и продолжат хорошо работать в 80% случаев. Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через 2 месяца после выпуска? Через 3 месяца?

Тема 1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Методом Гаусса решите СЛАУ

а) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 1x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 = 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8, \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$

2. Матричным методом решите системы

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

3. Методом Крамера решите системы

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

4. Найдите общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений, а также ее фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ 8x_1 - 12x_2 + 28x_3 - 4x_4 - 16x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \end{cases}$$

5. Данные об исполнении баланса за отчетный период, ден. ед., приведены ниже в таблице. Вычислите необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если ко-нечный продукт отрасли 1 должен увеличиться в два раза, а отрасли 2 – на 20%.

Производя-щие от-расли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

6. Решите задачу

Дана матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$ и вектор валового выпуска $X = \begin{pmatrix} 800 \\ 900 \end{pmatrix}$. Найдите вектор конечного продукта Y.

Тема 1.3. Элементы векторной алгебры

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Выполните пункты а)-и)

Пусть $A = (3, 4, -1)$, $B = (2, -4, 2)$, $C = (5, 6, 0)$, $D = (11, -3, -12)$ в некотором правом ортонормированном репере $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

а) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$, их модули и направляющие косинусы.

б) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{DA}$ и $7\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{DA}$.

в) Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

г) Найдите проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$.

д) Найдите координаты точки M, делящей отрезок $[AB]$ в отношении 2:1.

е) Докажите неколлинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и вычислить площадь треугольника ABC.

ё) Вычислите длину высоты треугольника ABC, опущенную из вершины A.

ж) Докажите некомпланарность векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и вычислить объем пирамиды $ABCD$.

з) Вычислите площадь сечения, проходящего через ребро $[BC]$ и вершины A и D пирамиды $ABCD$.

и) Вычислите длину высоты пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D.

2. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых приведены в таблице. Вычислите расход сырья S, затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

Вид изделия	Количество изделий, изд.	Расход сырья, кг	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	15	5	15	30
2	35	3	7	15
3	20	8	10	50
4	10	4	5	35

3. Решите задачу

На свободных векторах $\bar{a}(2,1,-1)$, $\bar{b}(3,-2,4)$ и $\bar{c}(3,0,-4)$, заданных в правом ортонормированном репере $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, построен параллелепипед. Найдите длину высоты параллелепипеда, опущенную на грань, образованную векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$.

4. Решите задачу

Вычислите площадь треугольника ABC, если $A(1,0,6)$, $B(4,5,-2)$, $C(7,3,4)$ в правом ортонормированном репере $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Найдите длину высоты данного треугольника, опущенной из вершины A на сторону $[BC]$.

5. Решите задачу

В правом ортонормированном репере $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ заданы векторы:

а) $\bar{a}(1, -3, 2)$, $\bar{b}(3, 1, -2)$, $\bar{c}(2, -1, 2)$;

б) $\bar{a}(7, 4, 6)$, $\bar{b}(2, 1, 1)$, $\bar{c}(19, 11, 17)$;

в) $\bar{a}(-3, 0, 15)$, $\bar{b}(12, -8, -8)$, $\bar{c}(-4, -8, 2)$.

Вычислите смешанное произведение этих векторов. Используя результаты вычислений, проверьте, будут ли компланарны данные векторы. Если векторы не копланарны, определите их ориентацию.

6. Решите задачу

Даны векторы $\bar{a}(7,2,1)$ и $\bar{b}(5,1,-2)$ в ортонормированном базисе $e=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ геометрического векторного пространства V^3. Найдите: а) $|\bar{a}|$ и $|\bar{b}|$; б) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; в) $\text{пр}_{\bar{b}}(3\bar{a}-\bar{b})$; г) $\cos\angle(2\bar{a}+\bar{b}, \bar{b}-\bar{a})$.

Тема 1.4. Элементы аналитической геометрии

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Решите задачу

Напишите каноническое, параметрические и приведённое уравнения прямой a, которая задана общим уравнением $2x-3y+7=0$ в некотором аффинном репере $(O,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$.

2. Решите задачу

Напишите каноническое, общее и приведенное уравнения прямой a, которая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2t, \end{cases}$ в некотором аффинном репере $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

3. Решите задачу

Напишите общее уравнение прямой a, проходящей через точку $M_0(1, -3)$ и параллельной прямой b, которая задана уравнением: а) $\begin{cases} x = 2 + 8t, \\ y = -2t; \end{cases}$ б) $\frac{x+8}{-1} = \frac{y-3}{2}$; в) $9x - y + 19 = 0$. (Репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.)

4. Исследуйте взаимное расположение двух прямых

а) $2x + 5y - 2 = 0$ и $x + y + 4 = 0$; б) $x - 2y - 1 = 0$ и $4y - 2x + 2 = 0$;

в) $y = 3 - 6x$ и $12x + 2y - 5 = 0$. (Репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.)

5. Напишите параметрические и канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями

$$\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x - 3y + z + 4 = 0. \end{cases}$$

6. Решите задачу

Напишите уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(2, -10, -4)$ перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$, если $M_1(0, -6, -8)$, $M_2(-2, -5, -9)$. (О/н репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.)

7. Решите задачу

Предприятие купило автомобиль стоимостью 24 тыс. руб. Ежегодная норма амортизации составляет 10% от цены покупки. Напишите уравнение, определяющее стоимость автомобиля в зависимости от времени t, постройте график. Найдите стоимость автомобиля: а) через 5 лет; б) через 6 лет и 3 месяца.

8. Решите задачу

Спрос на некоторый товар равен 10 единицам при цене 300 руб. за штуку и 20 единицам при цене 280 руб. Поставщик согласен продать 8 единиц товара при цене 84 руб. и 5 единиц при цене 60 руб. Найдите точку рыночного равновесия.

9. Решите задачу

Функция издержек производства шин имеет вид $C(x) = 30x + 2100$. Цена одной шины 60 руб. Найдите точку безубыточности. Постройте графики.

Тема 1.5. Линейные операторы

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Являются ли линейным векторным пространством следующие множества?

а) $V = \left\{ f(x) \middle| f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,\ a_0, a_1, a_2 \in R \right\}$;

б) $V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \middle| \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R \right\}$;

в) $V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in R,\ i, j = \overline{1, n} \right\}$.

2. Найдите базис и размерность следующих пространств

а) $V=\{(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n | x_1=0\}$; б) $V=\{(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n | x_1=x_n=0\}$;

в) $V=\{(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n | x_1=x_2=...=x_n\}$.

3. Выясните, являются ли данные системы линейно зависимыми?

а) $\bar{a}_1=(1,1,1)$; $\bar{a}_2=(1,1,2)$; $\bar{a}_3=(1,2,3)$;

б) $\bar{a}_1=(4,0,1,-5)$; $\bar{a}_2=(0,4,-5,-1)$; $\bar{a}_3=(-1,5,4,0)$; $\bar{a}_4=(5,1,0,4)$;

в) $f_1(x)=4-x$; $f_2(x)=2x+3$; $f_3(x)=6x+8$;

г) $\bar{a}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; $\bar{b}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; $\bar{c}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

4. Решите задачу

Используя определение, докажите, что система векторов $S=(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3)$, где $\bar{a}_1=(-2,3,0)$, $\bar{a}_2=(2,-3,4)$, $\bar{a}_3=(-2,0,-3)$, является базисом в линейном пространстве R^3. Найдите координаты вектора $\bar{p}=(-4,3,-7)$ в этом базисе.

5. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора, имеющего в некотором базисе матрицу

а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4 & -2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

6. Решите задачу

Найдите матрицу $A_{\varphi_{e'}}$ линейного оператора $\varphi: V\to V$ в базисе $e'=(\bar{e}_1',\ \bar{e}_2',\ \bar{e}_3')$, если в базисе $e=(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$ матрица $A_{\varphi_e}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, а в базисе $\xi=(\bar{\xi}_1,\ \bar{\xi}_2,\ \bar{\xi}_3)$ имеем $\begin{cases}\bar{e}_1=\bar{\xi}_1+\bar{\xi}_3\\ \bar{e}_2=2\bar{\xi}_1+\bar{\xi}_2\\ \bar{e}_3=-3\bar{\xi}_1+2\bar{\xi}_2+4\bar{\xi}_3\end{cases}$ и $\begin{cases}\bar{e}_1'=\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2+\bar{\xi}_3\\ \bar{e}_2'=\bar{\xi}_2-\bar{\xi}_3\\ \bar{e}_3'=\bar{\xi}_2+\bar{\xi}_3\end{cases}$

7. Решите задачу

Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$.

Найдите соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.

8. Найдите запас продуктивности матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,6\\ 0,9 & 0,3\end{pmatrix}$$

Форма контроля/оценочное средство: Контрольная работа

Раздел 2. Линейное программирование

Контролируемые ИДК: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3 ОПК-1.4

Тема 2.1. Графический метод

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Решите задачу

Фабрика выпускает сливочное и шоколадное мороженое. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы приведены в таблице 1. Изучение рынка сбыта показало, суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого 16 руб., шоколадного – 14 руб. Какое количество мороженого каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Исходный продукт	**Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого**		**Запас, кг**
	Сливочное	**Шоколадное**	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

2. Решите задачу графическим методом

$$L(x) = 3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

3. Решите задачу графическим методом

$$L(x) = 4x_1 + 6x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 12, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Тема 2.2. Симплексный метод

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Решите задачу

Предприятие располагает тремя производственными ресурсами (сырьем, оборудованием, электроэнергией) и может организовать производство продукции двумя различными способами. Расход ресурсов за один месяц и общий ресурс при каждом способе производства приведены в таблице. При первом способе производства предприятие выпускает за один месяц 3000 изделий, при втором – 4000 изделий. Сколько месяцев должно работать предприятие каждым из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

Производственные ресурсы	**Расход ресурсов за 1 месяц при работе**		**Общий ресурс**
	1-м способом	**2-м способом**	
Сырье	1	2	4
Оборудование	1	1	3
Электроэнергия	2	1	8

2. Решите задачу симплексным методом

$$L(x) = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$$

3. 23. Решите задачу симплексным методом

$$L(x)=3x_1+5x_2+4x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3 \le 9, \\ 2x_1+5x_2+x_3 \le 8, \\ x_1+2x_2+4x_3 \ge 7, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.$$

Тема 2.3. Двойственность в линейном программировании

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Для данной задачи составьте математическую модель двойственной задачи и по решению исходной найдите оптимальное решение двойственной

$$L(x)=x_1+3x_3+3x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+x_4 \ge 2, \\ x_1-x_2+3x_4 \ge -1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$$

2. Составьте математическую модель двойственной задачи и по ее решению найдите оптимальное решение исходной

$$L(x)=\frac{3}{2}x_1+2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \ge 7, \\ x_1+2x_2 \ge 8, \\ 3x_1+4x_2 \ge 12, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}.$$

3. Решите задачу

Для производства трех изделий А, В и С используются три вида сырья. Каж-дый из них используется в объеме, не превышающем 180, 210 и 236 кг. Нор-мы затрат каждого из видов сырья на одно изделие и цена единицы изделий приведены в таблице. Определите план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимального дохода. Составьте для данной задачи двойственную и найдите:

1) оптимальный план двойственной задачи;

2) интервалы устойчивости двойственных оценок;

3) увеличение максимального дохода при увеличении количества сырья 2-го и 3-го видов на 80 и 160 кг соответственно и при уменьшении количества сырья 1-го вида на 40 кг; оцените раздельное и суммарное влияние этих из-менений;

4) целесообразность введения в план производства 4-го изделия, нормы за-трат сырья на одно изделие которого составляют 2, 4 и 6 кг, а цена изделия равна 18 усл. ед.;

5) оптимальные планы исходной и двойственной задач, если количество сы-рья 1, 2 и 3 равно 140, 250 и 240 кг соответственно.

Виды сырья	**Нормы затрат сырья на одно изделие, кг**		
	A	***B***	***C***
1	4	2	1
2	3	1	3
3	1	2	5
Цена изделия, усл. ед.	10	14	12

Тема 2.4. Транспортная задача

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Решите задачу

На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количестве 90, 400, 110 т соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т соответственно. Найдите такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей вида $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Решите задачу

Составьте оптимальный план перевозки грузов от трех поставщиков с грузами 240, 40, 110 т к четырем потребителям с запросами 90, 190, 40 и 130 т. Стоимости перевозок единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Решите транспортную задачу, заданную распределительной таблицей

a_i \ b_j		1	2	3	4
		70	30	20	40
1	90	1	3	4	5
2	30	5	3	1	2
3	40	2	1	4	2

Тема 2.5. Целочисленное программирование

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Решите задачу

Для улучшения финансового положения фирма приняла решение об увеличении выпуска конкурентоспособной продукции, для чего принято решение об установке в одном из цехов дополнительного оборудования, занимающего $\frac{19}{3}$ м^2 площади. На приобретение дополнительного оборудования фирма выделила 10000 усл. ед., при этом она может купить оборудование двух видов. Приобретение 1-го комплекта оборудования 1-го вида стоит 1,0 усл. ед., 2-го вида – 3 усл. ед. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 шт., а одного комплекта оборудования 2-го вида – на 4 шт. Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется 2 м^2 площади, а для оборудования 2-го вида – 1 м^2 площади, определите такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

2. Найдите целочисленное решение следующей задачи

$$L(x) = 16x_1 + 9x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 - \text{целые}.$$

3. Найдите целочисленное решение следующей задачи

$$L(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4} - \text{целые}.$$

Форма контроля/оценочное средство: Расчетно-графическая работа

Раздел 3. Дискретная математика

Контролируемые ИДК: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3 ОПК-1.4

Тема 3.1. Элементы теории множеств

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Принадлежит ли элемент а множеству А, если

а) $a = \lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ,\ A = Z;$

б) $a = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6},\ A = Q;$

в) $a = \varnothing,\ A = \varnothing;$

г) $a = 624,\ A = \{y \in N \mid \exists n \in N : y^n$ делится на $18\};$

д) $a = \varnothing,\ A = \{\varnothing\};$

е) a – треугольник со сторонами 12, 15, 20;

з) $A = \{x \mid x$ – тупоугольный треугольник$\}$?

2. Перечислите элементы множества A, если:

а) $A = \left\{ x \in R \,\middle|\, \dfrac{2x}{x^2+1} < 3 \right\};$

б) A – множество всех трехзначных телефонных номеров, сумма цифр которых равна 3;

в) A – множество всех действительных значений a, при которых система $\begin{cases} -3x + ay = 5, \\ (a+6)x + 3y = 7, \end{cases}$ несовместна.

2. Найдите

$A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A,\ \bar{A},\ \bar{B},\ A \Delta B$, если:

$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\},\ B = \{\lambda, \mu, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\},\ U = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu\}$

3. Докажите соотношения, используя теоретико-множественные тождества. Проиллюстрируйте их на диаграммах Эйлера-Венна.

а) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$

б) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A.$

4. Решите задачу

Укажите все сюръективные отображения множества $A = \{1, 2, 3\}$ на множество $B = \{a, b\}$. Существуют ли инъективные отображения A в B?

5. Постройте биекцию между множествами А и В, то есть докажите их рав-номощность, если

а) $A = [0;1],\ B = [7;11];$

б) $A = [0;1),\ B = [0;+\infty);$

в) $A = \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right),\ B = (0;+\infty);$

г) $A = [0;1],\ B = R;$

г) $A=[0;1]$, $B=R$;

д) $A=(0;+\infty)$, $B=(-\infty;+\infty)$.

Тема 3.2. Элементы комбинаторики

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Решите задачу

1. Составьте из множества {2, 3, 4, 5} всевозможные сочетания, размещения и перестановки, а также 2-сочетания с повторениями и 2-размещения с повторениями. Подсчитайте их число, используя соответствующие формулы.

2. Докажите, что

$$\text{а) } P_m(m_1,m_2,\ldots,m_k)=\frac{m!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_k!};\ \text{б) } \overline{C_m^k}=C_{m+k-1}^k$$

3. Сколькими способами (маршрутами) курьер может развести шесть одинаковых покупок по шести различным адресам?

4. Компания из семи юношей и десяти девушек танцует. Сколько имеется вариантов участия девушек в каком-то парном танце, если в нем участвуют все юноши?

5. Решите задачу

Сколькими способами можно раздать 15 разных конфет Маше, Даше и Саше так, чтобы: а) каждый ребенок получил по 5 конфет; б) каждый ребенок получил по 5 конфет и Маше достались «Белочка» и «Мишка на Севере»; в) каждый ребенок получил по 5 конфет и кому-то из детей достались «Белочка» и «Мишка на Севере»; г) каждый ребенок получил по 5 конфет, а «Белочка» и «Мишка на Севере» достались разным детям?

6. Сколько решений имеет уравнение в целых неотрицательных числах?

$$x_1+x_2+\ldots+x_{12}=7$$

7. Решите уравнение

$$C_{x+1}^2\cdot A_x^2-4x^3=\left(A_{2x}^1\right)^2$$

8. Пользуясь методом телескопического суммирования, покажите, что

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}=1-\frac{1}{n!};$$

$$\text{б) } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)}=\frac{n}{5n+1};$$

$$\text{в) } \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{3n^2-n-2}{4n(n+1)}.$$

Тема 3.3. Элементы математической логики

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Составьте таблицы истинностных значений для следующих формул ЛВ. Определите тип указанных формул ЛВ.

$$\text{а) } \left((x\vee z)\vee\overline{z}\right)\to\left(\overline{x\vee z}\wedge x\wedge y\right);$$

$$\text{б) } (y\to x\wedge y)\wedge\overline{x\wedge z\to y};$$

$$\text{в) } x\vee y\to\left((x\to z)\to\overline{\overline{y}\wedge\overline{z}}\right).$$

2. Обладает ли дистрибутивностью дизъюнкция относительно импликации?

3. Докажите равносильность формул А, В, используя таблицы истинностных значений, если

$$A=(x\wedge y)\vee(\overline{x}\wedge\overline{z})\vee(\overline{y}\wedge z),\ B=(\overline{x}\wedge\overline{y})\vee(x\wedge z)\vee(y\wedge\overline{z})$$

4. Докажите

а) $\dfrac{H \vdash A \wedge B \to C}{H \vdash A \to (B \to C)}$;

начните доказательство с доказуемой формулы

$\vdash (x \wedge y \to z) \to (x \to (y \to z))$;

б) $\dfrac{H \vdash A \vdash \forall B,\ H \quad \bar{B}}{H \vdash A}$;

используйте правило доказательства от противного (XIII);

в) $\dfrac{H \vdash A \vdash\to (B \to C) \text{ и } H \quad C \to D}{H \vdash A \to (B \to D)}$.

5. Докажите, используя теорему дедукции и следствия из нее

а) $\vdash x \wedge (y \to z) \to (x \wedge y \to z)$; начните доказательство с A_4);

б) $\vdash (x \to y) \to ((\bar{x} \to y) \to y)$; используйте в доказательстве $A_{18'}$);

в) $x,\ \bar{y} \vdash (x \to y) \to \bar{x}$, то есть докажите $x,\ \bar{y}, x \to y \vdash \bar{x}$.

6. Указать область истинности логической функции, связанной с предикатами

а) «$x \le y$», если $x, y \in R^2$;

б) «$x > y$», если $x, y \in R^2$;

в) «число делителей числа x», если $x \in N$.

7. Докажите равносильность формул

а) $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) = \forall x (A(x) \wedge B(x))$;

б) $\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$.

8. Докажите общезначимость формулы

$$\forall x P(x) \to P(y)$$

Тема 3.4. Булевы функции

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Построив таблицы истинности булевых функций, проверьте эквивалентны ли формулы, их реализующие

$$(x_1 | \bar{x}_2) \to ((x_2 \downarrow \bar{x}_3) \to (x_1 \oplus x_3)) \text{ и } x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \to x_3)$$

2. Используя основные эквивалентности алгебры логики, доказать эквивалентность формул

$$(x_1 \wedge \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \wedge x_3) \oplus ((x_2 \to x_3) \to \bar{x}_1 \wedge x_2) \text{ и } (x_1 \wedge (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \oplus x_2) \oplus x_3.$$

3. По заданной ДНФ D с помощью метода Блейка построить сокращенную ДНФ

$$D = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4$$

4. Решите задачу

Построить сокращенную ДНФ функции f с помощью минимизирующей карты Карно: f(01010111)

5. Решите задачу

При каких n функция f принадлежит классам T_0 и T_1:

а) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

б) $f = \bigoplus_{i=1}^{n-2} (x_i \to (x_{i+1} \to x_{i+2}))$.

6. Выяснить является ли система функций полной

а) $F = \{xy, x \vee y, x \oplus y, xy \vee yz \vee zx\}$;

б) $F = \{(0110), (11000011), (10010110)\}$.

7. Является ли система функций базисом?

$$F = \{x \to y, x \oplus y, x \vee y\}$$

8. Проверить, какие из конъюктов множества А являются импликантами функции f; проверить, какие из импликант являются простыми импликантами функции f:

$$A = \{x_1, x_2, x_1\bar{x}_2\} \text{ и } f(1011)$$

Тема 3.5. Элементы теории графов

Форма контроля/оценочное средство: Решение задач

Вопросы/Задания:

1. Постройте граф отношения:

а) взаимной простоты на множестве $\{1,2,3,4,5,6\}$;

б) «больше» на множестве $\{-4,-3,-2,-1,0,1\}$.

в) «быть ребенком» на множестве членов семьи Ивановых {отец Иван Иванович, мать Мария Михайловна, дочь Варвара, дочь Василиса, сын Феофан, сын Василий}.

2. Решите задачу

На факультете 1055 студентов. Некоторые из них знакомы друг с другом. Докажите, что хотя бы у одного из них число знакомых среди студентов этого факультета четно.

3. Решите задачу

Гиперкубом называется граф

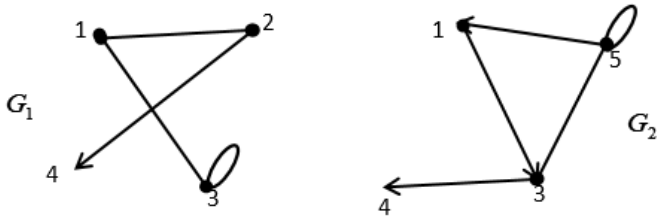
$$H_n = (V, E), \text{ где } V = \{0;1\}^n,\ E = \{(x,y) \mid x, y \in V,\ d(x,y) = 1\}.$$

Изобразите графы H_1, H_2, H_3, H_4. Укажите число их вершин и ребер.

4. Решите задачу

Даны графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, изображенные ниже на рисунке.

Выполните следующие операции над графами: а) $G_1 \cup G_2$; б) $G_1 \cap G_2$; в) $G_1 \times G_2$.



5. Решите зедачу

Пусть требуется найти кратчайший путь между двумя вершинами взвешенного орграфа, в котором могут присутствовать дуги отрицательного веса. Такая ситуация маловероятна в практической задаче, но она возникает в математических алгоритмах, использующих идею кратчайшего пути. Докажи-те, что, если одна вершина достижима из другой. То для существования кратчайшего пути между ними достаточно, чтобы в графе не существовало контура с суммарным отрицательным весом. Применим ли алгоритм Дейкстры при наличии дуг отрицательного веса? Алгоритм Флойда-Уоршелла для нахождения кратчайшего пути находит кратчайшие пути между всеми парами вершин, а также работает при наличии дуг отрицательного веса. Как проявится в алгоритме наличие в орграфе контура отрицательного веса?

6. Решите задачу

Найдите пример графа, который: 1) не эйлеров и не гамильтонов; 2) эй-леров, но не гамильтонов; 3) гамильтонов, но не эйлеров; 4) эйлеров и гамильтонов.

7. Постройте граф по его матрице смежности

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Решите задачу

Покажите, что в алгоритмах Краскала, Прима и Дейкстры, используя различные варианты выбора в случаях неоднозначности, можно получить все оптимальные решения.

7. Оценочные материалы промежуточной аттестации

1 семестр, Экзамен

Контролируемые ИДК: ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3 ОПК-1.4

Вопросы/Задания:

1. Матрица. Виды матриц

2. Определитель и его свойства.

3. Однородные системы линейных алгебраических уравнений (ОСЛАУ).

4. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

5. Базис линейного векторного пространства.

6. Линейные модели амортизации и издержек

7. Аналитическое задание векторного произведения. векторов в правом ортонормированном базисе

8. Переход от канонической формы ЗЛП к стандартной (симметричной).

9. Теоретико-множественные тождества. Законы идемпотентности. Ассоциативные законы. Коммутативные законы. Дистрибутивные законы. Законы поглощения. Законы де Моргана. Свойства дополнения. Свойства тождества

10. Полиномиальная теорема. Методы доказательства основных комбинаторных тождеств. Теорема об общем решении линейного рекуррентного соотношения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Формула Бине

11. Теорема о матрице смежности графа. Теорема о количестве неориентированных и ориентированных графов на n вершинах. Теорема о матрице принадлежности графа. Теорема о функции расстояний между вершинами графа.

12. Критерий эйлеровости графа. Теорема о том, когда граф обладает эйлеровым путем.

13. Лемма о рукопожатиях. Теорема о числе нечетных вершин любого графа. Теорема о существовании вершин одинаковой степени у графа. Теорема о графе на n вершинах, две из которых одинаковой степени

14. Основные теоремы двойственности и их экономическое содержание

15. Графический метод решения ЗЛП.

16. Симплекс-метод решения ЗЛП.

17. Критерий бесконечности множества. Теорема Кантора-Бернштейна.

18. Основные свойства ЛЗ и ЛНЗ систем векторов.

19. Выводимость из гипотез. Гипотезы. Понятия вывода и выводимой формулы из совокупности гипотез. Свойства выводимости из гипотез.

20. Формулы, подформулы ЛВ и их истинностные значения. Выполнимая формула, тавтология, противоречие. Равносильные формулы ЛВ. Важнейшие равносильности ЛВ.

21. Размещения с ограничениями. Разбиение на группы. Неопределенные уравнения специального вида.

22. Инъекция, сюръекция, биекция. Равномощные множества. Свойства равномощных множеств. Натуральный ряд, его n-ый отрезок. Конечное множество. Мощность конечного множества. Бесконечное множество. Счетное множество и его свойства. Несчетное множество и его свойства. Множество мощности континуума и его свойства. Мощность множества (кардинальное число). Следствия из теоремы Кантора-Бернштейна. Свойства мощностей. Множество мощности гиперконтинуума. Континуум-гипотеза и парадоксы.

23. Множество. Способы задания множеств. Числовые множества. Подмножество. Булеан множества. Равные множества. Универсальное множество. Пустое множество.

24. Каноническая и стандартная формы задачи линейного программирования.

25. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

26. Методы решения СЛАУ.

27. Отыскание опорного плана. Условие оптимальности.

28. Неориентированный граф (граф). Вершины графа, множество вершин графа. Ребра графа, множество ребер графа. Ориентированный граф, его вершины и дуги. Граф с петлями. Параллельные ребра графа. Простые графы. Степень вершины графа. Изолированная, висячая, четная, нечетная вершина графа.

29. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Прима. Алгоритм Краскала.

30. Теорема о числе ребер дерева. Теорема Кэли

31. Решите задачу

В некоторой отрасли 4 завода выпускают 3 вида продукции. Матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, а

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

матрица $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ – во втором; (a_{ij}, b_{ij}) - объемы продукции j-го типа на i-ом заводе в первом и втором кварталах соответственно. Найдите: а) объемы продукции; б) прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам; в) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если λ – это курс доллара по отношению к рублю.

32. Найдите

а) $3A^T-5B$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A\cdot A^T$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

33. Решите задачу

Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями $p=x+100$ и $p=-2x+250$.

а) Найдите точку рыночного равновесия.

б) Был введен налог, равный 10 на единицу продукции. Найдите новую точку рыночного равновесия и доход государства от введения этого налога.

в) Налог был удвоен. Найдите доход государства. Может ли государство потерять деньги, увеличивая налог?

г) Правительство предоставило субсидию, равную 5 на единицу продукции. Найдите новую точку рыночного равновесия.

34. Решите задачу

Используя определение, докажите, что система векторов $S=(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3)$, где $\overline{a}_1=(-2,3,0)$, $\overline{a}_2=(2,-3,4)$, $\overline{a}_3=(-2,0,-3)$, является базисом в линейном пространстве R^3. Найдите координаты вектора $\overline{p}=(-4,3,-7)$ в этом базисе.

6. Предприятие выпускает 4 вида продукции P_1, P_2, P_3, P_4 в количествах 50, 80, 20, 120 единиц. При этом нормы расхода сырья составляют соответственно 7, 3.5, 10 и 4 кг. Определите суммарный расход сырья (S) и его изменение (ΔS) при изменениях выпуска продукции P_1, P_2, P_3, P_4 соответственно 5, -4, -2, 10 ед.

35. Решите задачу

Найдите матрицу A_{φ} линейного оператора $\varphi: V\to V$ в базисе $e'=(\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3')$, если в базисе $e=(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ матрица $A_{\varphi}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, а в базисе $\xi=(\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \overline{\xi}_3)$ имеем $\begin{cases} \overline{e}_1=\overline{\xi}_1+\overline{\xi}_3 \\ \overline{e}_2=2\overline{\xi}_1+\overline{\xi}_2 \\ \overline{e}_3=-3\overline{\xi}_1+2\overline{\xi}_2+4\overline{\xi}_3 \end{cases}$ и $\begin{cases} \overline{e}_1'=\overline{\xi}_1-\overline{\xi}_2+\overline{\xi}_3 \\ \overline{e}_2'=\overline{\xi}_2-\overline{\xi}_3 \\ \overline{e}_3'=\overline{\xi}_2+\overline{\xi}_3 \end{cases}$

36. Решите задачу

На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количестве 90, 400, 110 т соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т соответственно. Найдите такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей вида $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

37. Решите задачу

Верно ли, что $A \subseteq B$, если:

а) $A = \{x \in R \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$, $B = \{x \in R \mid x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$;

б) $A = \{x \in R \mid x - 2 \geq 0\}$, $B = \{x \in R \mid x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$?

38. Решите задачу

Перечислите элементы множеств $A \times B$, $B \times A$, A^2, если $A = \{c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Найдите $|A \times B|$, $|B \times A|$, $|A^2|$.

39. Сколькими способами (маршрутами) курьер может развести шесть одинаковых покупок по шести различным адресам?

Перечислите элементы множеств $A \times B$, $B \times A$, A^2, если $A = \{c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Найдите $|A \times B|$, $|B \times A|$, $|A^2|$.

40. В аквариуме плавают пять телескопов, три жемчужных гурами и шесть золотистых сомиков. Случайным образом вылавливают три рыбки. Сколькими способами можно выловить: а) только телескопов; б) две гурами и золотистого сомика; в) хотя бы одного сомика; г) не более двух гурами?

Перечислите элементы множеств $A \times B$, $B \times A$, A^2, если $A = \{c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Найдите $|A \times B|$, $|B \times A|$, $|A^2|$.

41. В одном из отделов научно-исследовательского института работает 67 человек, причем 47 из них владеют английским языком, 35 − немецким, 23 – английским и немецким; французский знают 20 человек, немецкий и французский – 11, французский и английский – 12, все три языка знают 5 человек. Сколько человек не знает ни одного из этих языков?

Перечислите элементы множеств $A \times B$, $B \times A$, A^2, если $A = \{c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Найдите $|A \times B|$, $|B \times A|$, $|A^2|$.

42. Используя полиномиальную теорему или бином Ньютона, запишите разложение выражений

а) $(2x^2 - 3z)^7$; б) $\left(\frac{1}{x^2} - 3x^2\right)^6$; в) $(x - 2y + 3z - 4u)^3$

43. Найдите частное решение линейного рекуррентного соотношения

а) $a_{n+2} - 3a_{n+1} - 10a_n = 0$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$;

б) $a_{n+4} - 5a_{n+3} + 6a_{n+2} + 4a_{n+1} - 8a_n = 0$, $a_1 = a_3 = -1$, $a_2 = a_4 = 1$.

44. Указать область истинности логической функции, связанной с предикатами

а) «$x \leq y$», если $x, y \in R^2$;

б) «$x > y$», если $x, y \in R^2$;

45. Построить из заданной ДНФ функции ее СДНФ:

$$f = x_1 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_4.$$

46. Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для функций

а) $f = x_1 | x_2$;

б) $f = (0100)$.

47. Решите задачу

Используя основные эквивалентности алгебры логики, выразить 1) отрицание, конъюнкцию,

дизъюнкцию, сумму по модулю 2, эквивалентность, импликацию, стрелку Пирса через штрих Шеффера; 2) отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, сумму по модулю 2, эквивалентность, импликацию, штрих Шеффера через стрелку Пирса

48. Решите залачу

Выяснить является ли система функций $F=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ полной, если

$$f_1=(x_2\to x_3x_4)\to x_1x_3,\ f_2=(1001100101100110),$$

$$f_3=(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\bar{x}_3)\to x_2x_3,\ f_4=(x_3\oplus x_1)\bar{x}_2.$$

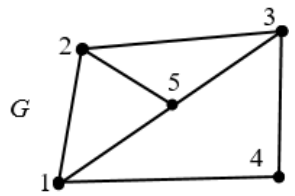
Если является полной, то найти все базисы, содержащиеся в ней.

49. Решите задачу

В елочной гирлянде каждая желтая лампочка соединена с 10 красными, а каждая красная – с 8 желтыми. Сколько красных и сколько желтых лампочек в гирлянде, если вместе их 180?

50. Определите типы маршрутов в графе, который изображен ниже на рисунке, если даны следующие маршруты:

а)1-2-3-5-2-1;
б)1-4-3-5-2;
в)3-4-1-5-3;
г)1-2-5-1-4-3-5-2-3;
д)5-3-2-5-1-4.



51. Постройте дерево, заданное последовательностью Прюфера

а) $\{1,2,3,1,2,3\}$; б) $\{2,3,4,5\}$

52. Решите задачу

Можно ли по побережью атолла, имеющего круглую форму, построить девять туристических домиков под номерами от 1 до 9 так, чтобы сумма номеров двух домиков по соседству не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

53. Решите задачу

Изобразите плоские графы тел Платона (гексаэдр, октаэдр). Проверьте формулу Эйлера для каждого из этих графов. Изобразите дуальные графы для графов тел Платона.

54. Решите задачу

Пусть требуется найти кратчайший путь между двумя вершинами взвешенного орграфа, в котором могут присутствовать дуги отрицательного веса. Такая ситуация маловероятна в практической задаче, но она возникает в математических алгоритмах, использующих идею кратчайшего пути. Докажите, что, если одна вершина достижима из другой. То для существования кратчайшего пути между ними достаточно, чтобы в графе не существовало контура с суммарным отрицательным весом. Применим ли алгоритм Дейкстры при наличии дуг отрицательного веса? Алгоритм Флойда-Уоршелла для нахождения кратчайшего пути находит кратчайшие пути между всеми парами вершин, а также работает при наличии дуг отрицательного веса. Как проявится в алгоритме наличие в орграфе контура отрицательного веса?

55. Задача «упаковка множеств» формулируется следующим образом: для данного семейства подмножеств конечного множества установите, существует ли в нем подсемейство из k попарно непересекающихся подмножеств. Докажите, что «упаковка множеств» является NP-полной задачей.

56. Используя методы теории графов, решите следующую задачу

$$L(x)=3x_1+x_2\to\max,$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2\le 5,\\ 2x_1+x_2\le 5\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 - \text{целые}. \end{cases}$$